

ÉQUATIONS ANALYTIQUES EXPLICITES DU MOUVEMENT D'UNE MINIFUSÉE

Sorin BALASOIU

Académie Technique Militaire, Bucarest

Yves GOURINAT

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques, Toulouse

Développement d'un modèle mathématique de mouvement complet en dynamique rationnelle reformulé dans le cas général, avec intégration explicite et application démonstrative et pédagogique à la minifusée conçue et réalisée par les étudiants de l'ENSICA : fusée à structure carbone monolithique, propulsée par moteur à poudre et aérodynamiquement stable.

Modèle Dynamique

Repères et paramétrages

Forces Appliquées

Équations Développées

Application

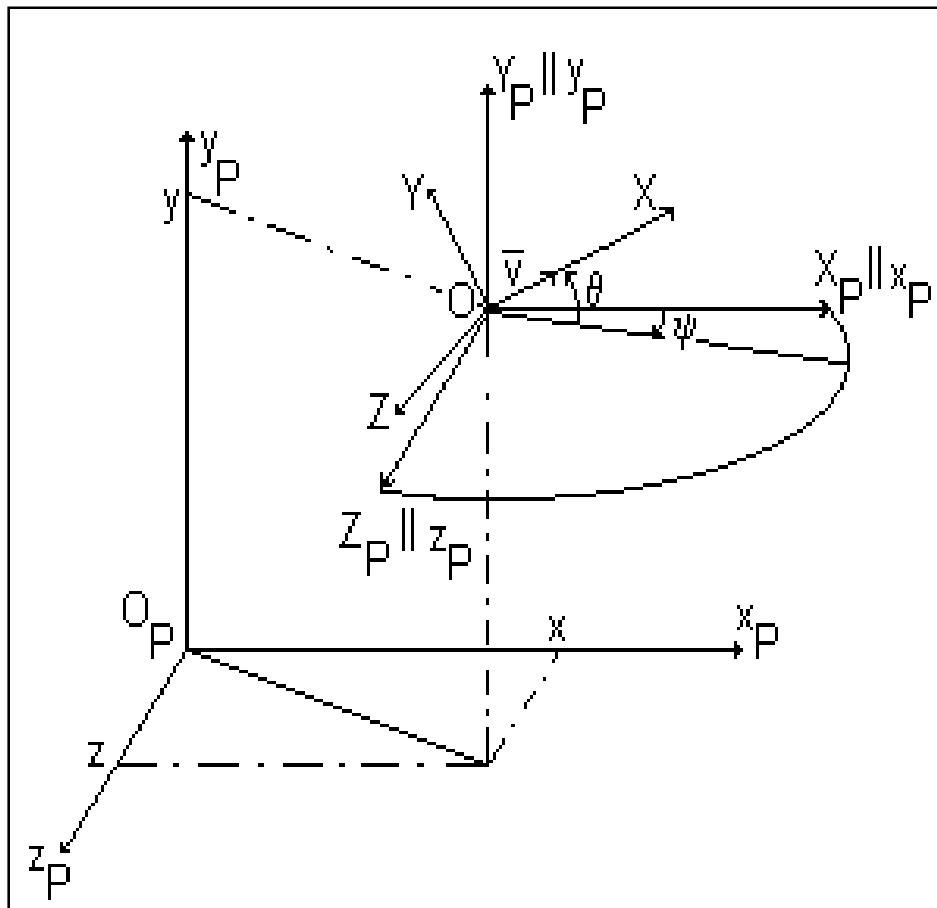
Calcul Numérique de Trajectoire

Mécanique et Pédagogie

Perspectives

Repères

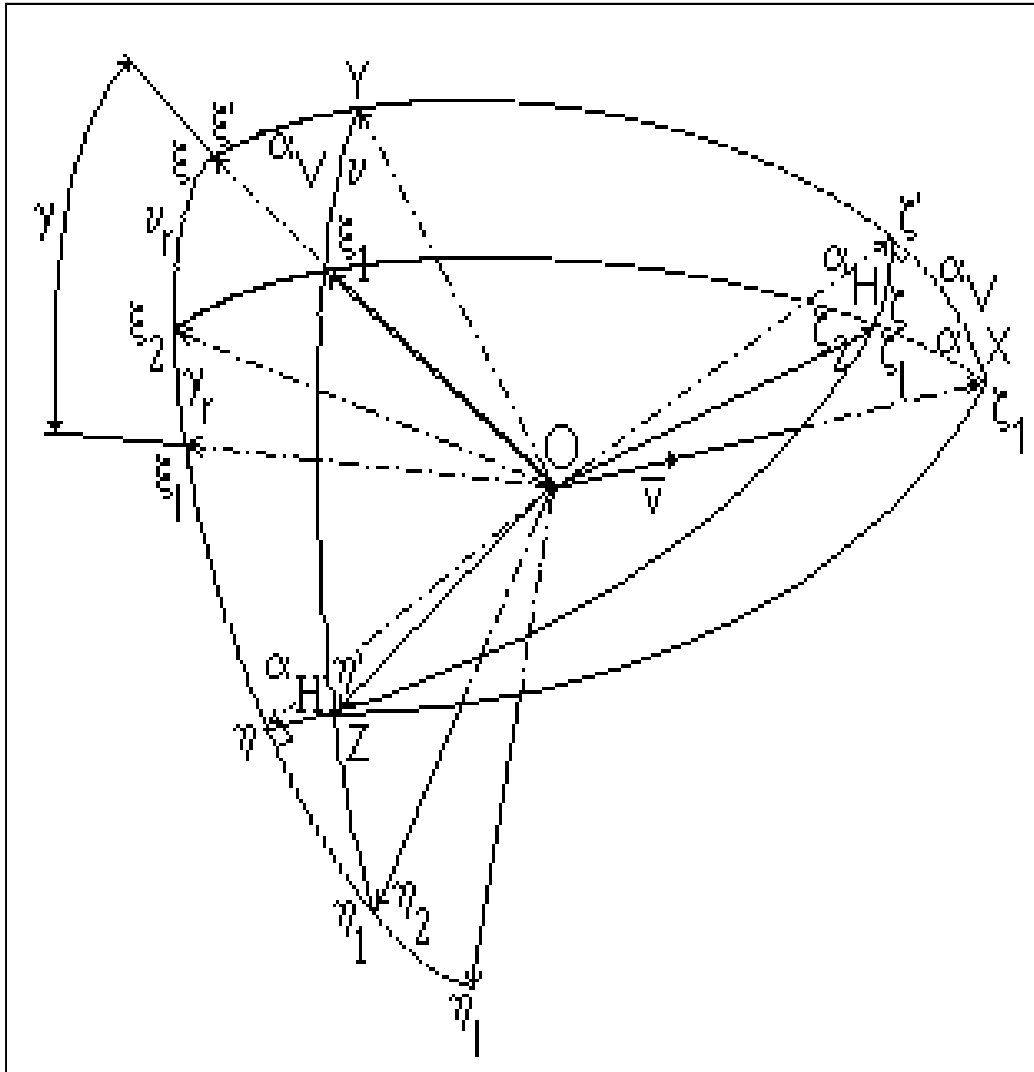
Repères pour la Trajectoire



$O_P x_P y_P z_P$:
repère non-Galiléen lié à la Terre

$OXYZ$:
repère lié à la trajectoire du centre
de masse O de la fusée
(repère de Frenet : X colinéaire à \bar{V})

Repères pour l'Attitude



O_2 et O_1 :
 repères de Resal liés la fusée sauf pour sa rotation propre autour de l'axe longitudinal (repère d'incidence et repère intermédiaire d'Euler)

O_1 :
 repère lié à la fusée (repère final d'Euler).

Paramètres d'attitude :

Le mouvement de la fusée autour de son centre de masse est défini par :

ou bien

$\psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi} \text{ et } r$
$\psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi} \text{ et } r$

ψ : angle de direction azimuthale
(précession d'Euler)

θ : inclinaison sur l'horizontale
(nutation d'Euler) ;

et ϕ (ou $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$) :
angles définissant O_2, O_2, O_2 (ou O_2)
par rapport à OXYZ

r (ou $\dot{\phi}$) :
angle définissant O_1, O_1, O_1
par rapport à O_2, O_2, O_2 (ou O_2).

Forces Appliquées

Forces à Distance :

Force de Pesanteur dans le référentiel terrestre

Hypothèses : Terre sphérique homogène, O_P origine Galiléenne

Direction poids apparent géocentrique

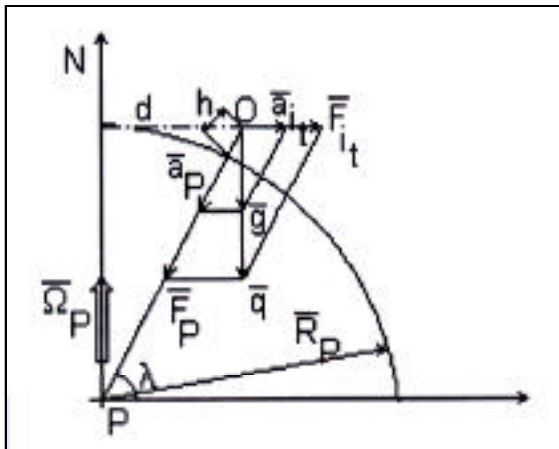
Le module tient compte de l'accélération d'entraînement au niveau du sol, et de l'altitude :

Pesanteur au niveau du sol :

$$g_P = \frac{f M_P}{R_P^2} \left[1 - \frac{\Omega_P^2 R_P^3}{f M_P} \cos^2 \lambda \right]$$

Influence de l'altitude :

$$g \cong g_P \left(1 + \frac{h}{R_P} \right)^{-2}$$



$$g_{x_P} = -g \frac{x_P}{\sqrt{x_P^2 + (R_P + y_P)^2 + z_P^2}}$$

$$g_{y_P} = -g \frac{R_P + y_P}{\sqrt{x_P^2 + (R_P + y_P)^2 + z_P^2}}$$

$$g_{z_P} = -g \frac{z_P}{\sqrt{x_P^2 + (R_P + y_P)^2 + z_P^2}}$$

Force de Coriolis dans le référentiel terrestre

$$(F_c)_x = 0$$

$$(F_c)_y = 2m v \Omega_P \cos \lambda \sin(\beta + \psi)$$

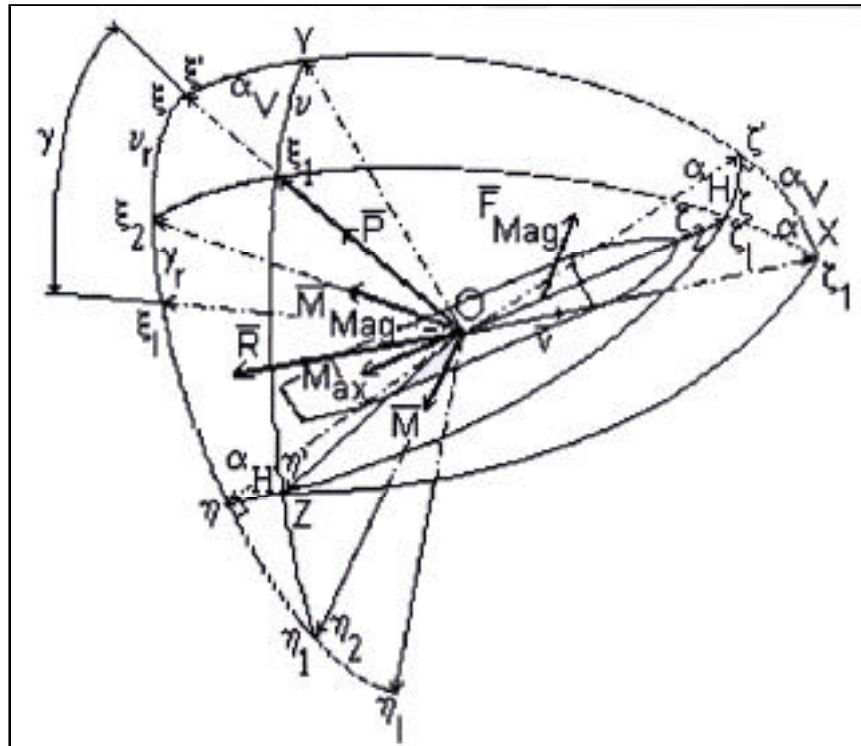
$$(F_c)_z = 2m v \Omega_P [\cos \theta \sin \lambda - \sin \theta \cos \lambda \cos(\beta + \psi)]$$

Forces Aérodynamiques :

Sur Corps Symétrique :

On considère la force aérodynamique de référence :

$$F_{ar} = \frac{\rho v^2}{2} S \quad (S : \text{maître couple})$$



Traînée et Portance :

$$\bar{F}_{tp} = F_{ar} (-C_x \bar{X} + C_z \bar{1})$$

$$C_x = C_{x0}(M; Re) + C_{xi}(\alpha; M) \quad (0 : \text{incidence nulle} ; i : \text{induit})$$

$$C_z = C_{zt}(\alpha; M; Re) - C_z(M; Re) \frac{l_c(\alpha; M)}{v} a^2$$

$$C_z = \frac{dC_z}{d\alpha} \frac{dC_{zt}}{d\alpha} ; \quad t : \text{translation}$$

l_c = distance centre de masse - centre de pression

comptée positivement si le centre de pression est en avant du centre de masse (c'est à dire pour un corps instable)

Moment Aérodynamique Principal :

$$\tilde{M}_{ap} = F_{ar} l C_m$$

de même : $C_m = C_{mt}(\alpha; M; Re) - C_z(M; Re) \frac{l_c}{V} \alpha$

et l : longueur de la fusée, avec même convention de signe que pour l_c .

l sert également référence pour le nombre de Reynolds.

Force / Moment de Magnus :

$$\bar{F}_{Mag} = -F_{Mag} ; \tilde{M}_{Mag} = F_{Mag} l$$

$$F_{Mag} = F_{ar} l \alpha C_{Mag}(M) - \frac{l_c(\alpha; M)}{V} \alpha$$

l_c : distance centre de masse - point d'application de la force de Magnus

Moment Axial d'Amortissement :

$$\tilde{M}_{ax} = -F_{ar} l^2 \alpha C_{ax}(M; Re, \alpha)$$

Prise en Compte de la Dissymétrie Aérodynamique :

L'incidence réelle α_r à portance nulle est définie par rapport aux axes de symétrie, par deux petits angles ϵ_p et ϵ_M corrigeant α_p et α_M (portance et moment nuls) selon les déviations χ_p et χ_M par rapport au plan O_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_r^0 \cos(\nu - \epsilon_p) &= \alpha \cos \nu - \alpha_p \cos \chi_p \\ \alpha_r^0 \sin(\nu - \epsilon_p) &= \alpha \sin \nu - \alpha_p \sin \chi_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_r^0 \sin(\nu_r - \epsilon_M) &= \alpha \sin \nu_r - \alpha_M \sin \chi_M & \alpha_r^0 \sin \epsilon_M &= \alpha_M \sin(\chi_M - \nu) \\ \alpha_r^0 \cos(\nu_r - \epsilon_M) &= \alpha \cos \nu_r - \alpha_M \cos \chi_M & \alpha_r^0 \cos \epsilon_M &\equiv \alpha - \alpha_M \cos(\chi_M - \nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot & \quad \cdot & \cdot & \quad \cdot & \cdot & \quad \cdot & \cdot & \quad \cdot \\ P &= P &= M &= M &= & & r^+ & \quad \left(P = P - ; M = M - \right) \end{aligned}$$

Moment dû au braquage des Gouvernes Aérodynamiques :

On considère le moment de spin (roulis) par braquage synchronisé :

$$M_r \cong n_a r_a \frac{\rho v^2}{2} S_a C_{z_s}^{\alpha_s} \left(\varepsilon - \frac{r_a \omega_{\zeta_2}^2}{v} \right) \quad C_{z_s}^{\alpha_s} = \frac{dC_{z_s}}{d\alpha_s}$$

n_a : nombre de gouvernes ; S_a : surface de référence de la gouverne

r_a : excentrement (distance axe longitudinal) du centre de poussée gouverne.

Forces de propulsion :

Force, moment et moment d'amortissement appliqués par un propulseur :

$$\begin{array}{lll} T_\zeta \cong -T\alpha_T \cos \chi & M_T^\zeta = -Te_T \sin \chi & M_{am}^\zeta = -C_j Q_e \omega_\zeta \\ T_\eta \cong -T\alpha_T \sin \chi & M_T^\eta = Te_T \cos \chi & M_{am}^\eta = -C_j Q_e \omega_\eta \\ T_\zeta \cong T & M_T^\zeta = \mu_l T & M_{am}^\zeta = -C_j' Q_e \omega_\zeta \end{array}$$

T : poussée du moteur ; T : excentricité angulaire de la poussée

e_T : excentricité linéaire (distance centre de masse - support poussée)

μ_l : excentrement de le tuyère à la base de la fusée

Q_e : débit massique du propulseur

C_j : coefficient d'amortissement transversal de propulsion

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} T = \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} r + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = T - \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} r \right)$$

La prise en compte de tous ces efforts conduit à un système de 12 équations différentielles d'état du 1er ordre [BALASOIU, 1998] rapportées aux 12 paramètres ($v, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\delta}, \dot{\epsilon}, \dot{\zeta}, \dot{\eta}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\chi}$) ou bien ($v, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\delta}, \dot{\epsilon}, \dot{\zeta}, \dot{\eta}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\chi}$) rassemblant :

- 6 équations obtenues par projection des équations vectorielles (1) et (2) sur les axes du système OXYZ ou du système de Resal $O_2 x_2 y_2 z_2$;
- 3 équations cinématiques, définitions des composantes du vecteur $\vec{\omega}_2$ dans les axes du système de Resal $O_2 x_2 y_2 z_2$;
- 3 équations de position du centre de masse de la fusée par rapport au système de référence non Galiléen lié à la Terre $O_p x_p y_p z_p$, donnant les composantes du vecteur \vec{v} sur les axes du système $x_p y_p z_p$

Équations Développées

Par rapport aux variables ($v, \chi, \alpha_v, \alpha_H, \psi, \theta, \lambda, X_P, Y_P, Z_P$) :

$$\dot{v} = \frac{T}{m} (\alpha_T \cos \chi \sin \alpha_v + \alpha_T \sin \chi \sin \alpha_H \cos \alpha_v + \cos \alpha_H \cos \alpha_v) - \frac{\rho v^2}{2m} S C_{X_t} + g_{Y_P} \sin \theta + g_{X_P} \cos \psi \cos \theta + g_{Z_P} \sin \psi \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{T}{mv} (-\alpha_T \cos \chi \cos \alpha_v + \alpha_T \sin \chi \sin \alpha_H \sin \alpha_v + \cos \alpha_H \sin \alpha_v) + \\ & + \frac{\rho v}{2m} S \frac{dC_{Z_t}}{d\alpha} \left(\arccos(\cos \alpha_v \cos \alpha_H) \cos \left(\arctg \left(\frac{\tg \alpha_H}{\sin \alpha_v} \right) \right) - \alpha_P \cos \chi_P - \right. \\ & - \frac{l_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \cos \theta \sin \psi + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha_v}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha_H}{dt} \cos \alpha_v \sin \psi \right) \cos \left(\arctg \left(\frac{\tg \alpha_H}{\sin \alpha_v} \right) \right) + \\ & + \frac{\rho}{2m} S l \left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\alpha_v}{dt} \sin \alpha_H + \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha_H - \frac{d\psi}{dt} \sin(\theta + \alpha_v) \cos \alpha_H \right) \frac{dC_{M_{\alpha_t}}}{d\alpha} (\arccos(\cos \alpha_v \cos \alpha_H) - \\ & - \frac{l'_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \cos \theta \sin \psi + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha_v}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha_H}{dt} \cos \alpha_v \sin \psi \right) \sin \left(\arctg \left(\frac{\tg \alpha_H}{\sin \alpha_v} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{v} (g_{Y_P} \cos \theta - g_{X_P} \cos \psi \sin \theta - g_{Z_P} \sin \psi \sin \theta) - 2 \Omega_P \cos \lambda \sin(\beta + \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_v = & \frac{T}{mv \cos \theta} (-\alpha_T \sin \chi \cos \alpha_H + \sin \alpha_H) + \\ & + \frac{\rho v}{2m \cos \theta} S \frac{dC_{Z_t}}{d\alpha} \left(\arccos(\cos \alpha_v \cos \alpha_H) \sin \left(\arctg \left(\frac{\tg \alpha_H}{\sin \alpha_v} \right) \right) - \alpha_P \sin \chi_P - \right. \\ & - \frac{l_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \cos \theta \sin \psi + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha_v}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha_H}{dt} \cos \alpha_v \sin \psi \right) \sin \left(\arctg \left(\frac{\tg \alpha_H}{\sin \alpha_v} \right) \right) - \\ & - \frac{\rho}{2m \cos \theta} S l \left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\alpha_v}{dt} \sin \alpha_H + \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha_H - \frac{d\psi}{dt} \sin(\theta + \alpha_v) \cos \alpha_H \right) \cdot \\ & \cdot \frac{dC_{M_{\alpha_t}}}{d\alpha} (\arccos(\cos \alpha_v \cos \alpha_H) - \\ & - \frac{l'_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \cos \theta \sin \psi + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha_v}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha_H}{dt} \cos \alpha_v \sin \psi \right) \cos \left(\arctg \left(\frac{\tg \alpha_H}{\sin \alpha_v} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{v \cos \theta} (-g_{X_P} \sin \psi + g_{Z_P} \cos \psi) + \frac{2 \Omega_P}{\cos \theta} (\cos \theta \sin \lambda - \sin \theta \cos \lambda \cos(\beta + \psi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\cdot} = & -\frac{J_{\zeta}-J}{J} \omega_{\zeta} \omega_{\eta}-\omega_{\eta} \frac{d \gamma}{d t}-\frac{\rho v^2}{2 J} S l \frac{d C_m}{d \alpha}\left(\arccos \left(\cos \alpha_v \cos \alpha_H\right) \sin \left(\operatorname{arctg}\left(\sin \alpha_H \operatorname{ctg} \alpha_v\right)\right)-\right. \\ & -\alpha_M \sin \chi_M-\frac{1_c}{v}\left(\frac{d \psi}{d t} \cos \theta \sin \psi+\frac{d \theta}{d t} \cos \psi+\frac{d \alpha_v}{d t} \cos \psi+\frac{d \alpha_H}{d t} \cos \alpha_v \sin \psi\right) \times \\ & \times\left(\sin \left(\operatorname{arctg}\left(\sin \alpha_H \operatorname{ctg} \alpha_v\right)\right)+\cos \left(\operatorname{arctg}\left(\sin \alpha_H \operatorname{ctg} \alpha_v\right)\right)\right)+\frac{\rho v}{2 J} S l^2 \times \\ & \times\left(\frac{d \gamma}{d t}+\frac{d \alpha_v}{d t} \sin \alpha_H+\frac{d \theta}{d t} \sin \alpha_H-\frac{d \psi}{d t} \sin \left(\theta+\alpha_v\right) \cos \alpha_H\right) \times \\ & \times \frac{d C_{m M}}{d \alpha}\left(\arccos \left(\cos \alpha_v \cos \alpha_H\right)-\frac{T}{J} e_T \sin \chi-\frac{C_j Q_e \omega_{\xi}}{J}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\cdot} = & -\frac{J-J_{\zeta}}{J} \omega_{\xi} \omega_{\zeta}+\omega_{\xi} \frac{d \gamma}{d t}+\frac{\rho v^2}{2 J} S l \frac{d C_m}{d \alpha}\left(\arccos \left(\cos \alpha_v \cos \alpha_H\right) \cos \left(\operatorname{arctg}\left(\sin \alpha_H \operatorname{ctg} \alpha_v\right)\right)-\right. \\ & -\alpha_M \cos \chi_M-\frac{1_z}{v}\left(\frac{d \psi}{d t} \cos \theta \sin \psi+\frac{d \theta}{d t} \cos \psi+\frac{d \alpha_v}{d t} \cos \psi+\frac{d \alpha_H}{d t} \cos \alpha_v \sin \psi\right) \times \\ & \times\left(\sin \left(\operatorname{arctg}\left(\sin \alpha_H \operatorname{ctg} \alpha_v\right)\right)+\cos \left(\operatorname{arctg}\left(\sin \alpha_H \operatorname{ctg} \alpha_v\right)\right)\right)+\frac{\rho v}{2 J} S l^2 \times \\ & \times\left(\frac{d \gamma}{d t}+\frac{d \alpha_v}{d t} \sin \alpha_H+\frac{d \theta}{d t} \sin \alpha_H-\frac{d \psi}{d t} \sin \left(\theta+\alpha_v\right) \cos \alpha_H\right) \times \\ & \times \frac{d C_{m M}}{d \alpha}\left(\arccos \left(\cos \alpha_v \cos \alpha_H\right)+\frac{T}{J} e_T \cos \chi-\frac{C_j Q_e \omega_{\eta}}{J}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\cdot} = & \frac{\mu_1 T}{J_{\zeta}}+n_s r_s \frac{\rho v^2}{2 J_{\zeta}} S_s C_{Z_s}^{\alpha_s}\left(\varepsilon-\frac{r_s \omega_{\zeta}^2}{v}\right)-\frac{C_j Q_e \omega_{\zeta}}{J_{\zeta}}- \\ & -\frac{\rho v}{2 J_{\zeta}} S l^2\left(\frac{d \gamma}{d t}+\frac{d \alpha_v}{d t} \sin \alpha_H+\frac{d \theta}{d t} \sin \alpha_H-\frac{d \psi}{d t} \sin \left(\theta+\alpha_v\right) \cos \alpha_H\right) C_{\infty} \end{aligned}$$

$$\dot{v}=\frac{\omega_{\eta}}{\cos \alpha_H}-\frac{d \theta}{d t}-\frac{d \psi}{d t} \sin \left(\theta+\alpha_v\right) \operatorname{tg} \alpha_H-\frac{\delta_{21} \Omega_{p_{x p}}+\delta_{22} \Omega_{p_{y p}}+\delta_{23} \Omega_{p_{z p}}}{\cos \alpha_H}$$

$$\dot{H}=-\omega_{\xi}-\frac{d \psi}{d t} \cos \left(\theta+\alpha_v\right)+\delta_{11} \Omega_{p_{x p}}+\delta_{12} \Omega_{p_{y p}}+\delta_{13} \Omega_{p_{z p}}$$

$$\dot{\cdot}=\omega_{\zeta}-\frac{d \alpha_v}{d t} \sin \alpha_H-\frac{d \theta}{d t} \sin \alpha_H+\frac{d \psi}{d t} \sin \left(\theta+\alpha_v\right) \cos \alpha_H-\delta_{31} \Omega_{p_{x p}}-\delta_{32} \Omega_{p_{y p}}-\delta_{33} \Omega_{p_{z p}}$$

$$x_P \dot{\cdot}=v \cos \theta \cos \psi \quad ; \quad y_P \dot{\cdot}=v \sin \theta \quad ; \quad z_P \dot{\cdot}=v \cos \theta \sin \psi$$

Équations par rapport à $(v, \alpha, \chi, \psi, \theta, \gamma_r, X_P, Y_P, Z_P)$:

$$\dot{v} = \frac{T}{m} (\alpha_T \cos(\psi - \chi) \sin \alpha + \cos \alpha) - \frac{\rho v^2}{2m} S C_x + g_{y_p} \sin \theta + g_{x_p} \cos \psi \cos \theta + g_{z_p} \sin \psi \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & \frac{T}{mv} (-\alpha_T \cos(\psi - \chi) \cos \alpha \cos \psi - \alpha_T \sin(\psi - \chi) \sin \psi + \sin \alpha \cos \psi) + \\ & + \frac{\rho v}{2m} S \frac{dC_z}{d\alpha} \left(\alpha \cos \psi - \alpha_p \cos \chi_p - \frac{l'_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \psi \right) + \\ & + \frac{\rho}{2m} S l \left(-\frac{d\psi}{dt} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \psi \cos \theta) + \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \sin \psi + \frac{d\psi}{dt} \cos \alpha + \frac{d\gamma_r}{dt} \right) \times \\ & \times \frac{dC_{Mag}}{d\alpha} \left(\alpha - \frac{l'_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right) \sin \psi + \\ & + \frac{1}{v} (g_{y_p} \cos \theta - g_{x_p} \cos \psi \sin \theta - g_{z_p} \sin \psi \sin \theta) + 2 \Omega_p \cos \lambda \sin(\beta + \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{T}{mv \cos \theta} (-\alpha_T \cos(\psi - \chi) \cos \alpha \sin \psi + \alpha_T \sin(\psi - \chi) \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi) + \\ & + \frac{\rho v}{2m \cos \theta} S \frac{dC_z}{d\alpha} \left(\alpha \sin \psi - \alpha_p \sin \chi_p - \frac{l'_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha}{dt} \right) \sin \psi \right) - \\ & - \frac{\rho}{2m \cos \theta} S l \left(-\frac{d\psi}{dt} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \psi \cos \theta) + \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \sin \psi + \frac{d\psi}{dt} \cos \alpha + \frac{d\gamma_r}{dt} \right) \times \\ & \times \frac{dC_{Mag}}{d\alpha} \left(\alpha - \frac{l'_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right) \cos \psi + \\ & + \frac{1}{v \cos \theta} (-g_{x_p} \sin \psi + g_{z_p} \cos \psi) + \frac{2 \Omega_p}{\cos \theta} [\cos \theta \sin \lambda - \sin \theta \cos \lambda \cos(\beta + \psi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & -\frac{J_\zeta - J}{J} \omega_{\zeta_2} \omega_{\eta_2} - \omega_{\eta_2} \frac{d\gamma_r}{dt} + \frac{\rho v^2}{2J} S l \frac{dC_m}{d\alpha} \alpha_M \sin(\chi_M - \psi) + \\ & + \frac{\rho v}{2J} S l^2 \left(-\frac{d\psi}{dt} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \psi \cos \theta) + \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \sin \psi + \frac{d\psi}{dt} \cos \alpha + \frac{d\gamma_r}{dt} \right) \times \\ & \times \frac{dC_{MM}}{d\alpha} \left(\alpha - \frac{l'_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right) + \frac{T e_T}{J} \sin(\psi - \chi) - \frac{C_J Q_e \omega_{\zeta_2}}{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\frac{J - J_\zeta}{J} \omega_{\zeta_2} \omega_{\zeta_3} + \omega_{\zeta_2} \frac{d\gamma_r}{dt} + \frac{\rho v^2}{2J} S l \frac{dC_m}{d\alpha} \left(\alpha - \alpha_M \cos(\chi_M - \psi) - \right. \\ & \left. - \frac{l'_z}{v} \left(\frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \theta + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right) + \frac{T e_T}{J} \cos(\psi - \chi) - \frac{C_J Q_e \omega_{\eta_2}}{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma_r} = & \frac{\mu_1 T}{J_\zeta} + n_s r_s \frac{\rho v^2}{2J_\zeta} S_i C_{z_i}^a \left(\varepsilon - \frac{r_s \omega_{\zeta_2}}{v} \right) - \frac{\rho v}{2J_\zeta} S l^2 \left(-\frac{d\psi}{dt} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \psi \cos \theta) + \right. \\ & \left. + \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \sin \psi + \frac{d\psi}{dt} \cos \alpha + \frac{d\gamma_r}{dt} \right) C_{\alpha} - \frac{C_J Q_e \omega_{\zeta_2}}{J_\zeta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\cdot} &= -\frac{\omega_{\zeta_2}}{\sin \alpha} + \frac{d\psi}{dt} \left(\sin \theta - \frac{\cos \psi \cos \theta}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + \frac{d\theta}{dt} \frac{\sin \psi}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \left(\beta_{11} \Omega_{P_{xy}} + \beta_{12} \Omega_{P_{yz}} + \beta_{13} \Omega_{P_{xz}} \right) \\
\dot{\cdot} &= \omega_{\eta_1} - \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} \cos \psi - \left(\beta_{21} \Omega_{P_{xy}} + \beta_{22} \Omega_{P_{yz}} + \beta_{23} \Omega_{P_{xz}} \right) \\
\dot{\cdot}_r &= \omega_{\zeta_1} + \frac{d\psi}{dt} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \psi \cos \theta) - \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \sin \psi - \frac{d\psi}{dt} \cos \alpha - \\
&\quad - \left(\beta_{31} \Omega_{P_{xy}} + \beta_{32} \Omega_{P_{yz}} + \beta_{33} \Omega_{P_{xz}} \right)
\end{aligned}$$

Les 3 dernières équations (en x_P, y_P, z_P) sont évidemment identiques à celles du système précédent.

Le système d'équations doit maintenant être intégré.

Dans la phase non-propulsée, les équations sont valables avec $T = 0$ et $Q_e = 0$.

Par ailleurs, si le projectile est stabilisé en roulis, on peut traiter le mouvement en roulis séparément, et le reste des équations avec :

$$\begin{aligned}
M_r &= n_a r_a \frac{\rho v^2}{2} S_a C_{Z_a}^{\alpha_a} \left(\varepsilon - \frac{r_a \omega_{\zeta_2}^a}{v} \right) = n_a r_a \frac{\rho v^2}{2} S_a C_{Z_a}^{\alpha_a} \left(\varepsilon - \frac{r_a \omega_{\zeta_2}^a}{v} \right) = 0 \\
\omega_{\zeta} &= \omega_{\zeta_2} = \omega_{\zeta}^a = \omega_{\zeta_2}^a = 0 \quad \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} = \frac{d\omega_{\zeta_2}}{dt} = 0
\end{aligned}$$

Calcul Numérique de Trajectoire

L'intégration explicite itérative du système est implémentée sur programme Turbo Pascal (sur Micro-Ordinateur) par Différences Finies à pas constant, selon la méthode d'Adams-Krâlov d'ordre 4. Les 4 premières valeurs sont obtenues par méthode de Runge-Kutta (également d'ordre 4 à pas constant).

Méthode d'intégration Runge-Kutta (d'ordre 4 à pas constant) :

soit $y(x)$ une fonction inconnue régie par : $y' = f(x; y)$

les conditions initiales étant $y_0 = y(x_0)$

le pas d'intégration h , tel que $y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h)$

Par développement de Taylor : $y_1 = y_0 + hy' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y^{(III)} + \frac{h^4}{24} y^{(IV)}$

dans lequel les dérivées successives sont remplacées par des moyennes pondérées de la dérivée première seule, calculée à des points judicieux, on considère :

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0) & k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) & k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3) \end{aligned}$$

Cette méthode est utilisée pour calculer y_1, y_2, y_3 et y_4 . On a ainsi les 5 premières valeurs ($y_0 ; y_1 ; y_2 ; y_3 ; y_4$) nécessaires pour la méthode d'Adams d'ordre 4.

Méthode d'intégration d'Adams-Krâlov (d'ordre 4 à pas constant) :

Considérant $\int_{x_n}^{x_{n+1}} y' dx = y(x_{n+1}) - y(x_n) = \Delta y_n$

un premier calcul utilise les coefficients négatifs pour les dérivées supérieures :

$$\Delta y_n = h \left[y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 y'_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 y'_{n-3} \right] \quad (\text{"alignement brisé"})$$

puis la fonction y trouvée est corrigée par un calcul à coefficients positifs :

$$\Delta y_n = h \left[y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_n + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 y'_{n-4} \right] \quad (\text{"alignement oblique"})$$

et enfin (éventuellement) par un calcul local mais à coefficients alternés :

$$\Delta y_n = h \left[y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_n + \frac{1}{24} \Delta^3 y'_n - \frac{19}{720} \Delta^4 y'_n \right] \quad (\text{"alignement horizontal"})$$

Application à la Minifusée ENSICA

Le modèle mathématique a été appliqué à la détermination du mouvement spatial de la minifusée ENSICA, à structure carbone, stabilisée aérodynamiquement, avec braquage de gouvernes nul ($\delta = 0$, $M_r = 0$, $\dot{\alpha} = 0$) et $\dot{\beta} = 0$; $\dot{\gamma} = 0$.

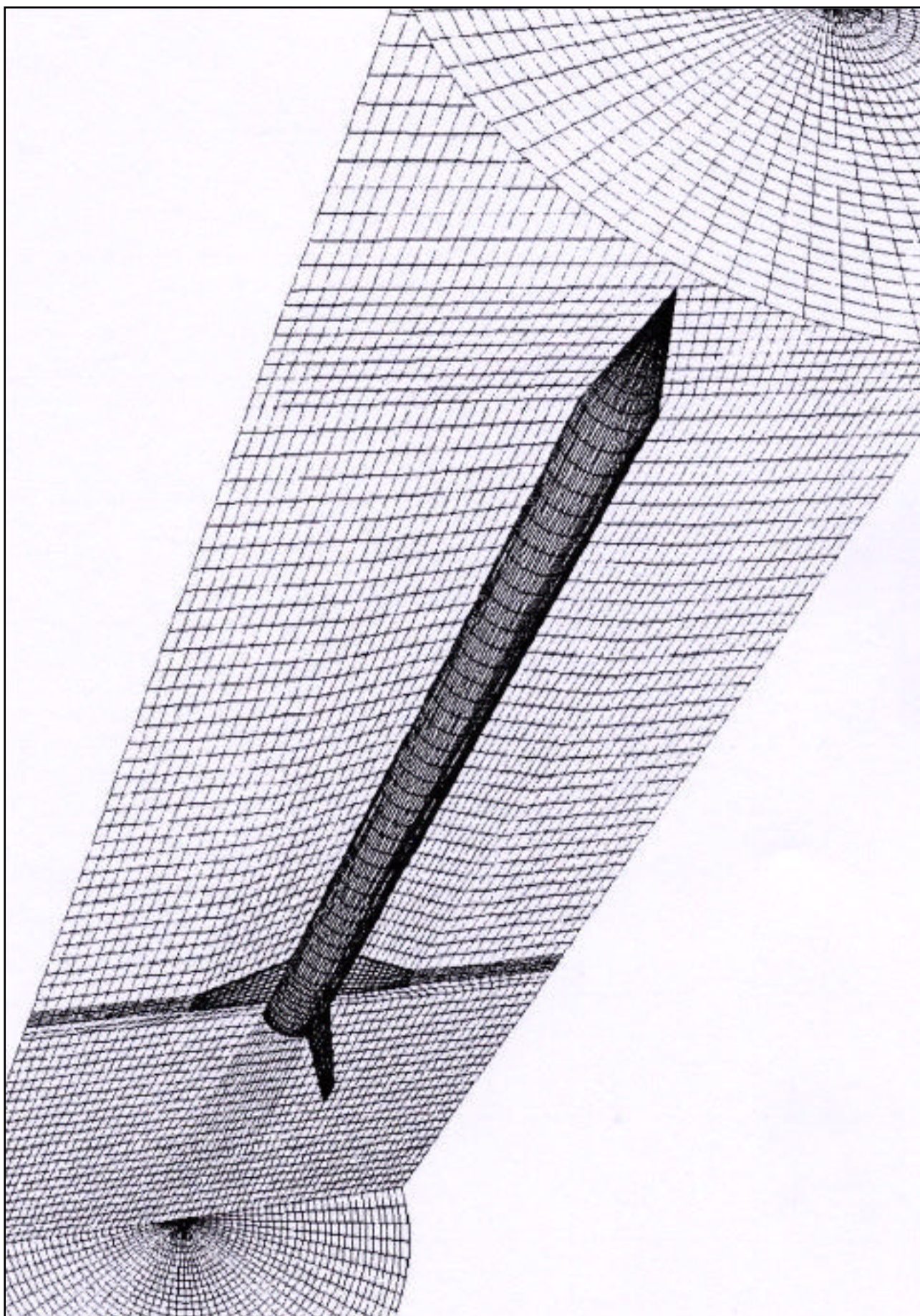
Le problème aérodynamique présente quant à lui une symétrie mécanique par rapport au plan d'incidence passant par cet axe ($\alpha_2 = 0$; $\frac{d}{dt} \alpha_2 = 0$).

Les coefficients aérodynamiques de la minifusée ont été déterminés par simulation numérique FLUENT.

L'interpolation des coefficients aérodynamiques a été réalisée par fonctions SPLINE pour l'interpolation en fonction du nombre de Mach, et par polynômes de LAGRANGE pour l'interpolation en fonction de l'angle d'incidence.

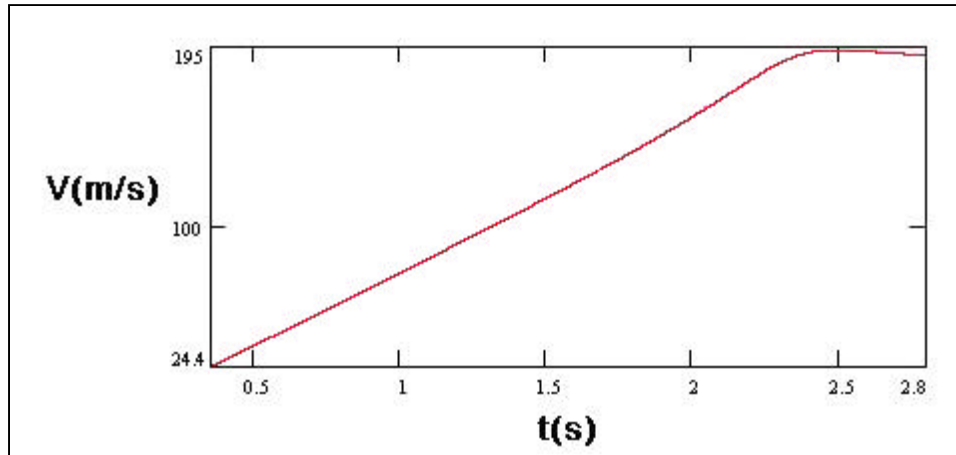
Les coefficients ont été calculés au niveau de la mer, avec $l_c = 0.2l$ ($l = 2.1\text{m}$).



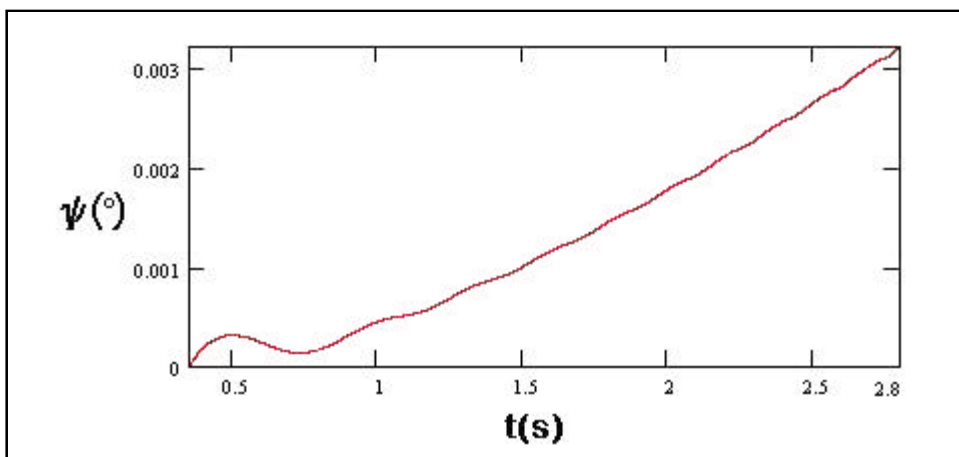


Résultats de la Simulation Numérique

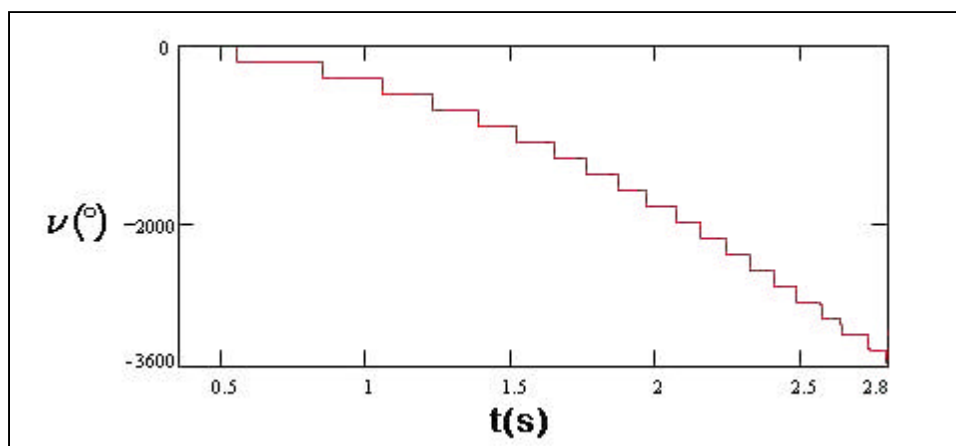
Représentations temporelles des paramètres du vol propulsé de la minifusée des élèves ENSICA (de la séparation rampe de tir à l'extinction moteur).



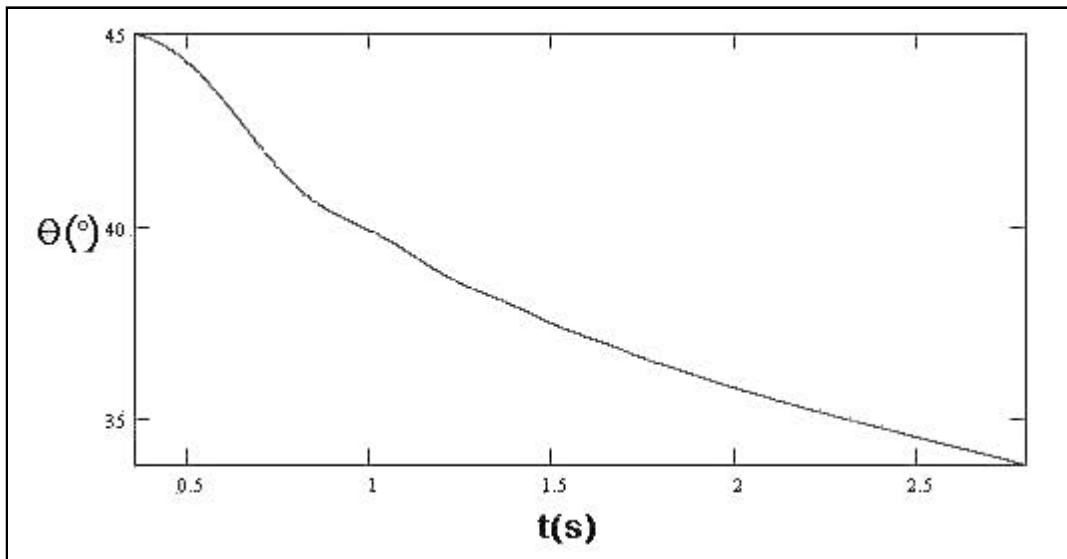
Représentation de $V(t)$: vitesse dans le référentiel terrestre



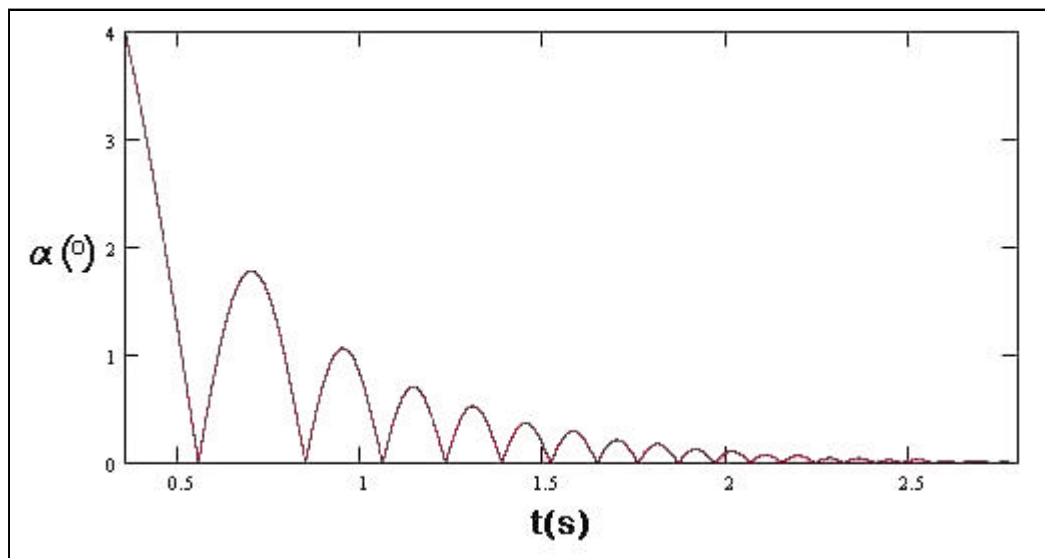
Représentation de $\psi(t)$: cap de la fusée



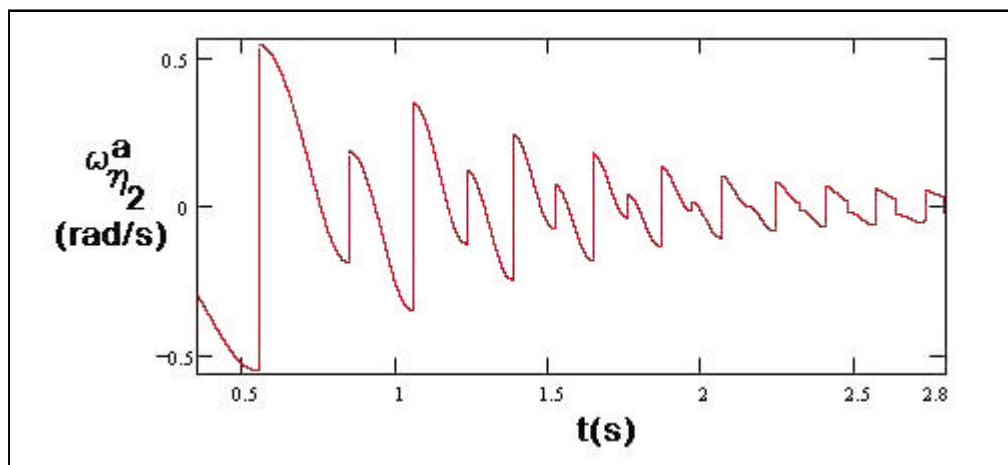
Représentation de $\nu(t)$: précession



Représentation de $\theta(t)$: assiette de la fusée



Représentation de $\alpha(t)$: incidence aérodynamique



Représentation de $\omega_{\eta_2}^a(t)$: vitesse de rotation aérodynamique (terrestre) autour de l'axe normal au plan d'incidence

Conclusions et perspectives

L'intégration explicite restitue les données de vol de la fusée, à savoir :

- *la trajectoire*
- *l'attitude*

Elle fournit ainsi les informations nécessaires pour appréhender :

- *le comportement dynamique des systèmes embarqués*
- *la stabilité naturelle en tangage*

Cette simulation offre également de nombreuses applications pédagogiques dans les domaines suivants :

- *Dynamique Rationnelle*
Intégration Numérique
- *Mécanique du Vol*

Enfin, le programme TurboPascal écrit pour expliciter le vol de la minifusée ENSICA peut être utilisé pour la modélisation analytique assistée par intégration numérique de tout projectile ou missile.